Analiza Funkcjonalna
WPPT IIIr. semestr letni 2011
WYKŁAD 8: Twierdzenie Riesza

07/05/2008

ROZKŁAD FUNKCJONAŁU NA RÓŻNICĘ FUNKCJONAŁÓW NIEUJEMNYCH

Definicja. Funkcjonał P na przestrzeni funkcyjnej V (na przykład $L^p(\mu)$, $C(X)$) lub ciągowej (np ℓ^p, c_0, itp.) nazywa się *nieujemny* jeśli $v \geq 0 \implies P(v) \geq 0$.

Jest oczywiste, że funkcjonał jest nieujemny wtedy i tylko wtedy dy zachowuje porządek $f \geq g \implies P(f) \geq P(g)$.

Twierdzenie. *Każdy funkcjonał rzeczywisty i ograniczony P na przestrzeni funkcyjnej lub ciągowej przedstawia się jako różnica dwóch funkcjonałów nieujemnych ograniczonych:*

$$P = P^+ - P^-.$$

Dowód. (Wystarczy dla przestrzeni funkcyjnych, bo ciągi to funkcje na $\mathbb{N}$.) Funkcjonały P^+ i P^- określamy dla funkcji nieujemnej f wzorami

$$P^+(f) = \sup\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}, \quad P^-(f) = -\min\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}.$$

Oczywiście zawsze dostaniemy wartości nieujemne, bo w klamrze jest między innymi funkcja zerowa. Najpierw sprawdźmy, że $P = P^+ - P^-$. Mamy taką oczywistą równoważność: $0 \leq g \leq f \iff 0 \leq f - g \leq f$. Zatem

$$\sup\{P(g) : 0 \leq g \leq f\} = \sup\{P(f-g) : 0 \leq g \leq f\} =$$
$$P(f) + \sup\{-P(g) : 0 \leq g \leq f\} = P(f) - \min\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}.$$

Teraz sprawdźmy liniowość P^+: Jeśli g i g' realizują z dokładnością do epsilona odpowiednie suprema dla funkcji nieujemnych f i f', to $0 \leq g + g' \leq f + f'$ i $P(g+g')$ jest z dokładnością do 2 epsilon równa $P^+(f)+P^+(f')$. To daje nierówność $P^+(f) + P^+(f') \leq P^+(f + f')$. Jeśli teraz $0 \leq g \leq f + f'$, to funkcje $(f-g)^+$ i $f' - (f-g)^-$ są nieujemne (dla tej drugiej: tam gdzie $f - g \geq 0$ wystarczy wiedzieć, że $f' \geq 0$ (a to założyliśmy), a w pozostałych punktach $(f-g)^- = -f + g \leq f'$), nie większe niż odpowiednio f i f'. Zatem

$$P^+(f) + P^+(f') \geq P((f-g)^+) + P(f' - (f-g)^-) = P(f' + f - g).$$

Ponieważ funkcje $f' + f - g$ reprezentują wszystkie funkcje między 0 a $f' + f$, otrzymujemy $P^+(f)+P^+(f') \geq P^+(f+f')$, czyli jest równość. Wyłączanie skalara nieujemnego (dodatnia jednorodność) jest natychmiastowe. Dla funkcji znakowanych $f = f^+ - f^-$ określamy $P^+(f) = P^+(f^+) - P^+(f^-)$. Addytywność wynika teraz ze wzorów

$$f^+ + g^+ = (f+g)^+ + h, \quad f^- + g^- = (f+g)^- + h,$$

gdzie h jest pewną funkcją nieujemną:

$$P^+(f+g) = P^+((f+g)^+) - P^+((f+g)^-) + P^+(h) - P^+(h) =$$
$$P^+(f^+) + P^+(g^+) - P^+(f^-) - P^+(g^-) = P^+(f) + P^+(g).$$

Jednorodność: jeśli $\alpha \geq 0$, to $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i to samo dla f^- i wyłączanie α przed P^+ wynika z dodatniej jednorodności P^+ dla funkcji nieujemnych. Pozostało sprawdzić wyłączanie stałej -1. Mamy $(-f)^+ = f^-$ oraz $(-f)^- = f^+$, zatem $P^+(-f) = P^+((-f)^+) - P^+((-f)^-) = P^+(f^-) - P^+(f^+) = -P^+(f)$, i o to chodziło.
Ograniczoność łatwo widać z definicji: norma nie przekracza $||P||$. Ponieważ $P^- = P - P^+$, nie musimy już o P^- niczego dowodzić. $\square$

Uwaga. A priori rozkład na różnicę dwóch funkcjonałów nieujemnych nie jest jednoznaczny, gdyż zawsze można dodać jakikolwiek nieujemny fukcjonał jednocześnie do P^+ i P^-. Ale P^+ i P^- określone w dowodzie lematu są w penym sensie optymalne: nie można już żadnego nieujemnego funkcjonału odjąć od P^+ i od P^- tak, aby nieujemność przynajmniej jedngo z nich nie została naruszona (bez dowodu).

Uwaga. Każdy funkcjonał zespolony rozkłada się na kombinację dwóch funkcjonałów rzeczywistych:
$$P = P_r + iP_i,$$
gdzie P_r i P_i oznaczają częś rzeczywstą i urojoną funkcjonału P (zadane wzorami $P_r(v) = \mathrm{Re}(P(v))$, $P_i(v) = \mathrm{Im}(P(v))$. Sprawdzenie tego jest kompletnie trywialne.

TWIERDZENIE RIESZA

Twierdzenie Riesza (o reprezentacji funkcjonału na $C([0,1])$). *Niech P będzie funkcjonałem liniowym ciągłym na $C([0,1])$. Wtedy istnieje skończona znakowana (lub zespolona) miara borelowska μ na $[0,1]$ taka, że dla każdej $f \in C([0,1])$*

$$P(f) = \int f \, d\mu.$$

Na odwrót, dla dowolnej skończonej znakowanej miary borelowskiej μ powyższy wzór zadaje funkcjonał ograniczony P na $C([0,1])$. Przyporządkowanie funkcjonałowi miary jest izometrycznym izomorfizmem z $C([0,1])$ na $\mathcal{M}([0,1])$ (zbiór miar borelowskich znakowanych lub zespolonych).

Dowód. Druga część jest oczywista (miara poprzez całkę zadaje funkcjonał liniowy na $C([0,1])$ i jeśli miara jest skończona, to funkcjonał jest ograniczony). Liniowość przyporządkowania mierze funkcjonału i zachowanie normy też są oczywiste.

Przechodzimy do istotnej części twierdzenia, to znaczy mając funkcjonał tworzymy miarę. Ponieważ P wyraża się jako kombinacja dwóch (lub czterech) funkcjonałów nieujemnych
$$P = P_r^+ - P_r^- + i(P_i^+ - P_i^-),$$

to wystarczy twierdzenie udowodnić dla funkcjonałów nieujemnych (a potem odpowiednie miary połączyć tą samą kombinacją). Niech więc P oznacza funkcjonał nieujemny na $C([0,1])$. Żądaną miarę zdefiniujemy zadając jej dystrybuantę. Niech

$$F_P(t) = \inf\{P(f) : f \geq \mathbf{1}_{[0,t]}\}.$$

Tak zdefiniowana funkcja ma następujące, oczywiste własności: $F_P(0) = 0$, F_P jest niemalejąca, $F_P(1) = P(\mathbf{1})$. Jako funkcja niemalejąca, może ona mieć co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości. Pokażemy prawostronną ciągłość F_P, tzn. warunek $\lim_{s\to t^+} F_P(s) = F_P(t)$. Weźmy ciągłą funkcję $f \geq \mathbf{1}_{[0,t]}$ taką, że $P(f) \leq F_P(t) + \epsilon$. Z ciągłości, ma ona w pewnym przedziale $[t,s]$ wartości większe od $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Tak więc $\frac{n}{n-1} f \geq \mathbf{1}_{[0,s]}$. To oznacza, że

$$F_P(s) \leq P(\tfrac{n}{n-1} f) \leq \tfrac{n}{n-1}(F_P(t) + \epsilon).$$

Ponieważ s może być w tym rozumowaniu wzięte dowolnie blisko t, otrzymujemy

$$\lim_{s\to t^+} F_P(s) \leq \tfrac{n}{n-1}(F_P(t) + \epsilon).$$

Z dowolności n i ϵ otrzymujemy $\lim_{s\to t^+} F_P(s) \leq F_P(t)$. Odwrotna nierówność jest oczywista z monotoniczności.

Tak więc F_P jest dystrybuantą pewnej miary nieujemnej μ skupionej na przedziale $[0,1]$. Pozostaje sprawdzić, czy faktycznie $P(f) = \int f\,d\mu$ dla funkcji ciągłych. Ponieważ oba funkcjonały są liniowe, i każda funkcja rozkłada się na różnicę funkcji nieujmnych, wystarczy sprawdzać tę równość dla funkcji nieujemnych. Podobnie, każda funkcja nieujemna daje się przybliżać jednostajnie funkcjami (np. wielomianami), z których każda jest jest różnicą dwóch funkcji ciągłych, nieujemnych, malejących, więc można ograniczyć się do funkcji ciągłych malejących. Najpierw zauważmy, że jeśli

$$\mathbf{1}_{[0,t]} \leq f \leq \mathbf{1}_{[0,s]}$$

to

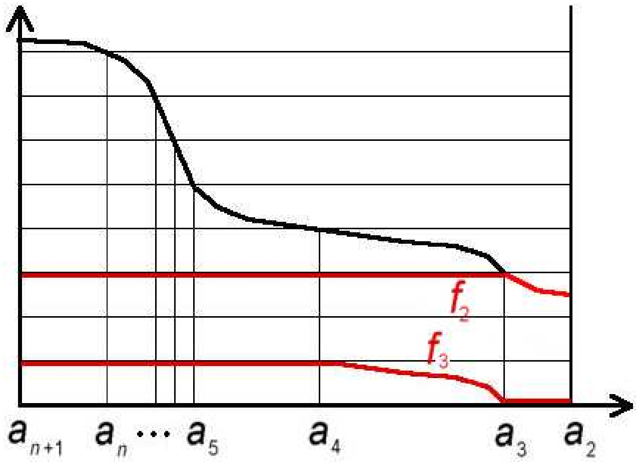
$$\mu([0,t]) = F(t) \leq P(f) \leq F(s) = \mu([0,s]).$$

Weźmy teraz dowolną funkcję ciągłą, nieujemną, malejącą f i $\epsilon > 0$. Niech a_i oznaczają punkty w których f przyjmuje wartości $i\epsilon$. Liczby a_i oczywiście maleją, a indeksy i przebiegają jakieś kolejne wartości naturalne $[m, m+1, \ldots, n]$. Dodatkowo przyjmujemy, że $a_{n+1} = 0$, $a_{m-1} = 1$. Funkcję f można teraz rozłożyć jako $f = \sum_{i=m-1}^{n} f_i$, gdzie

$$f_{m-1} = \min\{f, m\epsilon\}$$

a dla pozostałych i,

$$f_i = \max\{0, \min\{f - i\epsilon, \epsilon\}\}.$$



Łatwo zauważyć, że funkcje f_i spełniają warunek

$$(m-1)\epsilon + \epsilon\mathbf{1}_{[0,a_m]} \leq f_{m-1} \leq m\epsilon$$

oraz dla $i = m, \ldots, n$,

$$\epsilon\mathbf{1}_{[0,a_{i+1}]} \leq f_i \leq \epsilon\mathbf{1}_{[0,a_i]},$$

stąd

$$(m-1)\epsilon\mu([0,1]) + \epsilon\mu([0,a_m]) \leq P(f_{m-1}) \leq m\epsilon\mu([0,1]),$$

oraz, dal pozostałych i,

$$\epsilon\mu([0,a_{i+1}]) \leq P(f_i) \leq \epsilon\mu([0,a_i]).$$

Sumując po i otrzymamy: po lewej stronie całkę z funkcji prostej przybliżającej f od dołu (z dokładnością do ϵ), w środku $P(f)$, a po prawej całkę z funkcji prostej przybliżającej f od góry. Przechodząc z ϵ do zera dostajemy równość całki i funkcjonału.

□

TWIERDZENIE RIESZA NA PRZESTRZENI ZWARTEJ

PARĘ FAKTÓW Z TOPOLOGII

Niech (X, d) oznacza przestrzeń metryczną.

1) Odległość punktu x od (dowolnego) zbioru $A \subset X$ określamy wzorem

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : \ y \in A\}.$$

Elementarnie sprawdza się, że przy ustalonym zbiorze A, $d(x, A)$ jest ciągłą funkcją zmiennej x. Jeśli A jest zbiorem domkniętym, to $d(x, A) = 0 \iff x \in A$ (dla zbiorów niedomkniętych $d(x, A) = 0$ jest równoważny temu, że x należy do brzegu zbioru A).

2) Niech U_1, U_2 będą zbiorami otwartymi i niech f będzie nieujemną funkcją ciągłą zerującą się na dopełnieniu sumy $U_1 \cup U_2$ (mówimy, że f ma *nośnik* w $U_1 \cup U_2$). Wtedy f można przedstawić jako sumę $f_1 + f_2$ nieujemnych funkcji ciągłych o nośnikach odpowiednio U_1 i U_2. Dowód: Na przykład można zdefiniować

$$f_1(x) = \begin{cases} 0; \quad x \notin U_1 \cup U_2, \\ \frac{f(x)d(x,U_1^c)}{d(x,U_1^c)+d(x,U_2^c)}; \ x \in U_1 \cup U_2, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0; \quad x \notin U_1 \cup U_2, \\ \frac{f(x)d(x,U_2^c)}{d(x,U_1^c)+d(x,U_2^c)}; \ x \in U_1 \cup U_2. \end{cases}$$

3) Załóżmy teraz, że X jest ośrodkowa. Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną funkcji ciągłych $f : X \to [0, 1]$ i niech $\sup\{f \in \mathcal{F}\} = 1_U$, gdzie U jest pewnym zbiorem otwartym. Wtedy istnieje ciąg $f_n \in \mathcal{F}$ taki, że $1_U = \sup_n f_n$. Dowód: Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla każdego $x \in U$ istnieje $f_{x,\epsilon} \in \mathcal{F}$ spełniająca $f_{x,\epsilon}(x) > 1 - \epsilon$. Nierówność $f_{x,\epsilon}(y) > 1 - \epsilon$ jest spełniona dla y z pewnego otwartego otoczenia V_x punktu x. Zbiory V_x $(x \in U)$ pokrywają U. Ponieważ (U, d) jest przestrzenią ośrodkową, ma ona własność Lindelöfa, zatem z pokrycia tego można wybrać podpokrycie przeliczalne $\{V_{x_n}\}$. Wtedy łatwo widać, że $\sup_n f_{x_n,\epsilon} \geq 1 - \epsilon$ na całym zbiorze U. Dla malejącego do zera ciągu parametrów ϵ_m otrzymamy podwójnie indeksowany ciąg funkcji f_{x_n,ϵ_m} o supremum równym 1_U. Numerując ten ciąg liczbami naturalnymi otrzymany żądany ciąg funkcji f_n.

4) Załóżmy teraz, że X jest zwarta. Jeśli f_n i f są ciągłymi funkcjami rzeczywistymi i f_n zbiegają monotonicznie do f w każdym punkcie $x \in X$, to zbieżność ta jest jednostajna. Dowód: Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech $F_n = \{x : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}$. Oczywiście jest to zbiór domknięty. Ponieważ f_n zbiegają monotonicznie do f, zbiory te maleją (czyli tworzą ciąg zstępujący). Gdyby wszystkie one były niepuste, to tworzyły by rodzinę scentrowaną i ze zwartości ich przekrój byłby niepusty. Ale w punkcie z tego przekroju nie byłoby zbieżności. Zatem któryś zbiór F_{n_0} jest pusty, a to oznacza, że od numeru n_0 funkcje f_n są od funkcji f oddalone mniej niż ϵ w metryce supremum. Czyli zbieżność jest jednostajna.

TWIERDZENIE RIESZA

Twierdzenie Riesza (o reprezentacji funkcjonału na $C(X)$). *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną zwartą i niech* $C(X)$ *oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych rzeczywistych na* X *z normą supremum. Niech* P *będzie funkcjonałem liniowym ciągłym (równoważnie – ograniczonym) na* $C(X)$*. Wtedy istnieje skończona znakowana miara borelowska* μ *na* X *taka, że dla każdej* $f \in C(X)$

$$P(f) = \int f \, d\mu.$$

Na odwrót, dla dowolnej skończonej znakowanej miary borelowskiej μ *powyższy wzór zadaje funkcjonał ograniczony* P *na* $C(X)$*. Przyporządkowanie mierze funkcjonału jest izometrycznym izomorfizmem.*

Dowód. Ostatnie dwa zdania są oczywiste. Główną część twierdzenia udowodnimy najpierw przy założeniu, że funkcjonał P jest nieujemny.
Niech U będzie zbiorem otwartym. Zadajmy

$$\mu(U) = \sup\{P(f) : \ 0 \leq f \leq 1_U\}.$$

Oczywiście tak zadana funkcja na zbiorach otwartych jest nieujemna i ograniczona. Pokażemy najpierw jej skończoną podaddytywność. Niech $U = U_1 \cup U_2$. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $0 \leq f \leq 1_U$ taka, że $\mu(U) \leq P(f) + \varepsilon$. Zgodnie z faktem 2) (patrz część tego dokumentu dot. topologii), $f = f_1 + f_2$ gdzie f_1 ma nośnik w U_1 a f_2 ma nośnik w U_2, obie funkcje są nieujemne i oczywiście ograniczone przez 1. Mamy

$$\mu(U) \leq P(f) + \varepsilon = P(f_1) + P(f_2) + \varepsilon \leq P(U_1) + P(U_2) + \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolny, $\mu(U) \leq P(U_1) + P(U_2)$. Pokażemy teraz ciągłość z dołu (dalej tylko na zbiorach otwartych), co da nam przeliczalną podaddytywność (suma przeliczalna jest granicą wstępującą sum skończonych). Niech więc $U = \bigcup_n U_n$ będzie sumą wstępującą zbiorów otwartych. Niech $x \in U$. Wtedy $x \in U_n$ dla pewnego n i funkcja

$$f(y) = \min\left\{1, \frac{d(y, U_n^c)}{d(x, U_n^c)}\right\}$$

jest ciągła, $0 \leq f \leq 1_{U_n}$ oraz $f(x) = 1$. Stąd biorąc

$$\mathcal{F} = \{f \text{ ciągła} : \ \exists_n \, 0 \leq f \leq 1_{U_n}\}$$

mamy $\sup\{f \in \mathcal{F}\} = 1_U$. Z topologicznego faktu 3) istnieje ciąg $f_m \in \mathcal{F}$ o supremum 1_U. Każda funkcja f_m ma nośnik w którymś ze zbiorów U_n, powiedzmy w $U_{n(m)}$. Niech $g_m = \sup\{f_i : \ 1 \leq i \leq m\}$. Wtedy funkcje g_m są ciągłe, tworzą ciąg niemalejący zbieżny do 1_U, każda z nich ma nośnik w zbiorze U_{n_m}, gdzie $n_m = \max\{n(i) : \ 1 \leq i \leq m\}$. Niech znowu f będzie funkcją ciągłą o nośniku w U taką, że $\mu(U) \leq P(f) + \varepsilon$. Wtedy $f \cdot g_m$ jest ciągiem zbieżnym monotonicznie do

f, a zatem z faktu 4) zbieżnym jednostajnie. Z ciągłości funkcjonału (w zbieżności jednostajnej) pozwala to napisać

$$\mu(U) \leq P(f) + \varepsilon = \lim_m P(g_m) + \varepsilon \leq \lim_m \mu(U_{n_m}) + \varepsilon.$$

Ponieważ jest jasne, że $\mu(U_n)$ rośnie i nie przekracza $\mu(U)$, ostatnią granicę można zastąpić granicą po wszystkich n oraz zachodzi żądana równość $\mu(U) = \lim_n \mu(U_n)$.

Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ definiujemy teraz

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U \text{ otwarty}\}.$$

Pokażemy przeliczalną podaddytywność, co da nam, że μ jest miarą zewnętrzną. Niech $A = \bigcup_n A_n$. Ustalmy szereg nieujemnych liczb $\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$. Dla każdego n istnieje zbiór otwarty $U_n \supset A_n$ spełniający $\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \varepsilon_n$. Oczywiśie $U = \bigcup_n U_n$ jest otwarty i zawiera A. Korzystając z przeliczalnej podaddytywności μ na zbiorach otwartych otrzymujemy

$$\mu(A) \leq \mu(U) \leq \sum_n \mu(U_n) \leq \sum_n \mu(A_n) + \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolnie mały, mamy przeliczalną podaddytywność.

Teraz pokażemy, że zbiory otwarte są mierzalne w sensie Caratheodory'ego względem μ. Czyli mamy pokazać, że jeśli W jest zbiorem otwartym, to dla dowolnego zbioru A, $\mu(W \cap A) + \mu(W^c \cap A) \leq \mu(A)$. Niech U zawiera A. Rozważmy parę zbiorów otwartych $V_n = \{x : d(x, W^c) < \frac{1}{n}\}$ i $W_n = \{x : d(x, W^c) > \frac{1}{n}\}$. Para V_n i W_n jest rozłączna, ponadto $V_n \supset W^c$ oraz $W_n \nearrow W$. Ponieważ $U \cap V_n$ i $U \cap U_n$ są rozłączne, to dla każdej pary funkcji ciągłych $0 \leq f \leq \mathbf{1}_{U \cap V_n}$, $0 \leq g \leq \mathbf{1}_{U \cap U_n}$ mamy $f + g \leq \mathbf{1}_U$. Stąd, biorąc supremum po takich parach funkcji mamy, dla każdego n,

$$\mu(U) \geq \mu(U \cap V_n) + \mu(U \cap W_n) \geq \mu(A \cap W^c) + \mu(U \cap W_n).$$

Przechodząc do granicy (i z ciągłości z dołu μ na zbiorach otwartych) dostajemy $\mu(U) \geq \mu(A \cap W^c) + \mu(U \cap W) \geq \mu(A \cap W^c) + \mu(A \cap W)$. Biorąc infimum po U, dostajemy $\mu(A) \geq \mu(A \cap W^c) + \mu(A \cap W)$, co kończy dowód mierzalności. Ostatecznie więc μ jest miarą (ograniczoną) na zbiorach borelowiskich.

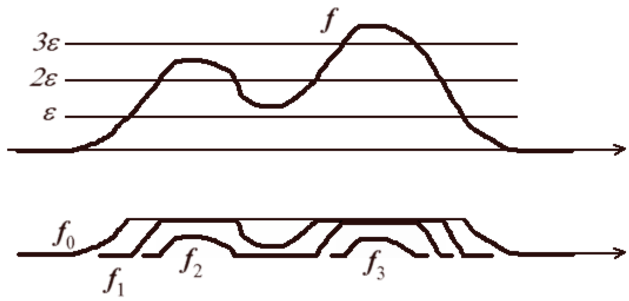
Pozostaje sprawdzić, czy faktycznie $P(f) = \int f \, d\mu$ dla funkcji ciągłych. Ponieważ oba funkcjonały są liniowe, i każda funkcja rozkłada się na różnicę funkcji nieujmnych, wystarczy sprawdzać tę równość dla funkcji nieujemnych. Najpierw zauważmy, że jeśli $1_U \leq f \leq 1_V$ (U, V zbiory otwarte), to $\mu(U) \leq P(f) \leq \mu(V)$. Weźmy teraz dowolną funkcję nieujemną f i $\varepsilon > 0$. Funkcję f można rozłożyć jako $f = \sum_{i=0}^n f_i$, gdzie

$$f_i = \max\{0, \min\{f - i\varepsilon, \varepsilon\}\},$$

i n nie przekracza $\frac{\max f}{\varepsilon}$. Każda z funkcji f_i ma nośnik w zbiorze

$$U_i = \{x : \ f(x) > i\varepsilon\}$$

oraz jest równa ε na zbiorze U_{i+1} (zob. rysunek)



Mamy zatem $\varepsilon 1_{U_{i+1}} \leq f_i \leq \varepsilon 1_{U_i}$, czyli $1_{U_{i+1}} \leq \frac{f_i}{\varepsilon} \leq 1_{U_i}$, z czego wynika, że

$$\sum_{i=2}^{n} \varepsilon\mu(U_i) \leq P(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(U_i).$$

Oczywiście, z monotoniczności całki, również

$$\sum_{i=2}^{n} \varepsilon\mu(U_i) \leq \int f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(U_i).$$

Prawa i lewa strona różnią sie co najwyżej o $\varepsilon\mu(X)$, zatem co najwyżej o tyle samo mogą się różnić $P(f)$ i $\int f \, d\mu$. Ponieważ ε jest dowolnie mały otrzymujemy równość. Zakończyliśmy dowód dla funkcjonału nieujemnego. $\square$

Tomasz Downarowicz